ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

<u>Rappel</u> : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (4 points)

Pour tout nombre complexe z distinct de i et de $-i$, on considère le nombre complexe $Z = \dfrac{2z}{1+z^2}$.

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $\dfrac{2z}{1+z^2} = \sqrt{2}$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

2) Soit a, un nombre réel donné tel que $|a| > 1$.

   Démontrer que l'équation $\dfrac{2z}{1+z^2} = a$ admet deux solutions distinctes de module 1.

3) On pose dans cette question $z = e^{i\theta}$ où θ est appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Exprimer Z en fonction de $\cos\theta$.
   En déduire que Z est supérieur ou égal à 1.

4) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un nombre réel. On pourra utiliser la propriété : Z est un nombre réel si et seulement si il est égal à son conjugué.

DEUXIEME EXERCICE (5 points)

On considère l'application linéaire f_1 de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une base du noyau de f_1.
2) L'application linéaire f_1 est-elle bijective ?
3) Démontrer que l'image de f_1 est un sous espace vectoriel de dimension 1 dont on précisera une base.

4) Soit m un nombre réel quelconque.

Soit l'application linéaire f_m de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a. Démontrer que le vecteur $u\,(1,1,1)$ est vecteur propre de l'application linéaire f_m.
b. Démontrer que le nombre réel $m-1$ est une valeur propre de l'application linéaire f_m d'espace propre associé de dimension 2.
c. En déduire que l'application linéaire f_m n'admet que deux valeurs propres distinctes $m+2$ et $m-1$.
d. La matrice A_m est elle diagonalisable ?
e. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice A_m est inversible.

TROISIEME EXERCICE (5 points)

n désigne un nombre entier naturel.

Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $]-1+\infty[$ pour n non nul par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$ et $f_0(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) Etudier les variations des fonctions f_0, f_1 et f_2.

2) Démontrer que la courbe C_2 admet une asymptote oblique que l'on précisera.

Construire sur un même graphique C_0, C_1 et C_2.

3) Pour tout nombre entier naturel n, justifier l'existence de $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

On pose $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a. Calculer u_0.
Montrer que $u_1 = 1 - u_0$. En déduire u_1.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante.
En déduire qu'elle est convergente.

4)

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq \frac{1}{2n}$ et $u_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

5)

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel non nul n, $u_n = (-1)^n \times \left(\ln 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} \right)$.

b. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{P+1}}{p}$.

QUATRIEME EXERCICE (6 points)

Partie A

Pour tout nombre entier naturel k non nul, et pour tout nombre x de l'intervalle $]0,1[$, soit

$R_k(x) = x + x^2 + ... + x^k = \sum_{i=1}^{k} x^i$ et $P_k(x) = 1 + 2x + ... + kx^{k-1} = \sum_{i=1}^{k} ix^{i-1}$

1) Démontrer que $\lim_{k \to +\infty} R_k(x) = \frac{1}{1-x}$.

2) Démontrer que la fonction polynôme P_k est la dérivée de R_k.

   En déduire une expression plus simple de $P_k(x)$.

3) Déterminer pour nombre x de l'intervalle $]0,1[$, $\lim_{k \to +\infty} P_k(x)$.

Partie B

Dans le jeux de « petits chevaux », chaque joueur jette à son tour deux dés équilibrés ; pour pouvoir entrer dans la partie, il faut tirer un double six.

1) Pour un joueur donné, on note X, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tentatives nécessaire pour réussir un double six.

   a. Démontrer que la probabilité d'échouer k fois consécutivement est égale à $\left(\frac{35}{36}\right)^k$.

b. Pour tout nombre entier naturel k non nul, on désigne par p_k la probabilité de l'événement $(X = k)$.

Démontrer que $p_k = \frac{1}{36} \times \left(\frac{35}{36}\right)^{k-1}$.

c. On admet que la variable aléatoire X admet une espérance mathématique notée $E(X)$ définie par $E(X) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} (p_i \times i)$.

d. Déterminer $E(X)$.

2) Pour deuxième joueur, on note Y, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tentatives nécessaire pour réussir un double six.

a. Démontrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k tels que $k < n$, la probabilité de l'événement $(X = k, Y = n - k)$ est indépendante de k et égale à : $\left(\frac{1}{36}\right)^2 \times \left(\frac{35}{36}\right)^{n-2}$.

b. En déduire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $P(X + Y = n)$.