ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (4 points)

Soit α un nombre réel tel que $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

On considère l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

$$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

1) a. Déterminer en fonction de α le module du nombre complexe $1+i\tan\alpha$.

   b. Ecrire le nombre complexe $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ sous forme exponentielle.

2) a. Démontrer que si z est solution de l'équation (E) alors $|1+iz|=|1-iz|$.

   b. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont réelles. On pourra écrire z sous forme algébrique.

3) Soit z une solution de l'équation (E).

   a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel θ appartenant à l'intervalle

   $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan\theta$.

   b. Déterminer θ en fonction de α.

   c. En déduire les solutions de l'équation (E).

DEUXIEME EXERCICE (5 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique B.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ admettant pour matrice dans la base canonique B

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1)
   a. Démontrer que $f \circ f = f$.

   b. En déduire que les seules valeurs propres possibles de la matrice M sont 0 et 1.

2) On considère les vecteurs

$V_1 = (1;1;1;1)$ $V_2 = (1;-1;1;-1)$ $V_3 = (1;0;-1;0)$ $V_4 = (0;1;0;-1)$

   a. Démontrer que $(V_1\ ,\ V_2)$ constitue une base du noyau de l'application linéaire f.

   b. Démontrer que $(V_3\ ,V_4)$ constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.

   c. En déduire que la matrice M est diagonalisable.

   d. Vérifier que (V_1, V_2, V_3, V_4) constitue une base de $\mathbb{R}^4$ notée B'.

   e. Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

   f. ${}^tP$ désigne la matrice transposée de la matrice P. Calculer le produit ${}^tPP$.

   En déduire la matrice inverse de P.

   g. Donner la matrice M' de l'application linéaire f dans la base B'.

TROISIEME EXERCICE (5 points)

1) Soit X, une variable aléatoire continue de loi exponentielle de paramètre λ ; λ étant un nombre réel strictement positif. On rappelle que la fonction densité de probabilité notée φ de la variable aléatoire X est définie par :

Si $x < 0$ $\quad \varphi(x) = 0$

Si $x \geq 0$ $\quad \varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

a. Vérifier que $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$

b. On admet que la variable aléatoire X a une espérance mathématique notée $\mathrm{E}(\mathrm{X})$

définie par $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)\, dx$. Démontrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$.

c. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

On rappelle que F est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{Si } a < 0 \qquad F(a) = 0$$

$$\text{Si } a \geq 0 \qquad F(a) = P(\mathrm{X} \leq a) = \int_0^{a} \varphi(x)\, dx$$

2) Soit Y une variable aléatoire continue de même loi exponentielle que X. On suppose de plus que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

a. Vérifier que $P\left(Max(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leq a\right) = P\left(\mathrm{X} \leq a \quad et \quad \mathrm{Y} \leq a\right)$. On note M la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum de X et de Y.

Soit F_M la fonction de répartition de M.
Démontrer que pour tout nombre réel a, $F_M(a) = [F(a)]^2$.

b. En déduire que la variable aléatoire M admet pour densité de probabilité la fonction φ_M définie par

$$\text{Si } x < 0 \quad \varphi_M(x) = 0$$

$$\text{Si } x \geq 0 \quad \varphi_M(x) = 2\,\lambda\, e^{-\lambda x} - 2\,\lambda\, e^{-2\lambda x}$$

c. Déterminer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{M})$ de la variable aléatoire M.

QUATRIEME EXERCICE (6 points)

On rappelle que toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

1)

a. Donner la définition d'une fonction strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
b. n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + \ldots + x^{n-1} + x^n = \sum_{i=1}^{n} x^i .$$

Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,, +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n\left(x\right)=1$ a une solution unique a_n dans l'intervalle $\left[0\ ,+\infty\right[$. Vérifier que $0 < a_n \leq 1$. On ne demande pas de déterminer a_n.

2) Dans la suite de l'exercice, on étudie la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$f_{n+1}\left(a_n\right)-f_{n+1}\left(a_{n+1}\right)=a_n{}^{n+1}$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$. En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

3) On désigne par ℓ la limite de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$.

a. Démontrer que pour tout nombre a différent de 1, $f_n\left(a\right)=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$.

b. Vérifier que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)<1$. Démontrer $\dfrac{1}{2}\leq\ell<1$.

c. Vérifier que $f_n\left(\ell\right)<f_n\left(a_n\right)$.

d. Déduire du a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\ell\right)$.

e. Démontrer que $\dfrac{\ell}{1-\ell}\leq 1$.

f. Déterminer ℓ. On pourra utiliser les résultats de b et de e.