T. A. - C **2011**

ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (4 points)

Soit l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x + 1 = 0$.

1) Prouver que l'équation précédente a trois solutions distinctes. On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

2) Encadrer chacune des solutions par deux entiers consécutifs.

3) Soit α un nombre réel.
Vérifier que $\sin(3\alpha)$ est la partie imaginaire du nombre complexe $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$.
En déduire que $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

4) Soit x une solution de l'équation donnée.
   a. Démontrer qu'il existe un nombre θ unique de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = 2\sin\theta$
   b. Démontrer que $\sin(3\theta) = \frac{1}{2}$.
   c. En déduire les solutions de l'équation donnée.

DEUXIEME EXERCICE (4 points)

Un pion est situé à l'origine d'un repère orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Un joueur déplace le pion suivant la règle suivante :

Par translation de vecteur $\vec{i}$ ou par translation de vecteur $\vec{j}$; le vecteur de translation étant pris au hasard.

Soit n un nombre entier naturel non nul.

On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de translations de vecteur $\vec{i}$ lors de n déplacements du pion.

On note Y_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de translation de vecteur $\vec{j}$ lors de n déplacements du pion.

1) a) Préciser les lois de probabilité des deux variables aléatoires X_n et Y_n.

   b) Donner les espérances mathématiques et les variances en fonction de n des deux variables aléatoires X_n et Y_n.

2) a) Démontrer que $E\left(X_n^2\right)=\dfrac{n(n+1)}{4}$.

   b) Vérifier que $X_n + Y_n = n$.

   c) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_nY_n.

   d) On définit $\operatorname{cov}\left(X_n,Y_n\right)=E\left(X_nY_n\right)-E\left(X_n\right)E\left(Y_n\right)$.

   Déterminer $\operatorname{cov}\left(X_n,Y_n\right)$.

TROISIEME EXERCICE (6 points)

On rappelle la propriété suivante :

Si (v_n) est une suite croissante, (w_n) une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n-v_n)=0$, alors les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et admettent la même limite.

1) Montrer que pour tout nombre x de l'intervalle $[0;1]$,
   $1+x\le e^x\le 1+3x$. On pourra étudier les variations des deux fonctions

f et g définies sur l'intervalle $[0;1]$ respectivement par
$f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = 1 + 3x - e^x$.

2) Montrer que pour tout nombre entier n strictement supérieur à 1 et pour tout nombre x de l'intervalle $[0;1]$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 3 \times \frac{x^n}{n!}.$$

3) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$, on définit les suites $(v_n)_{n \in N^*}$ et $(w_n)_{n \in N^*}$ respectivement par

$$v_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$w_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 3 \times \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + 3 \times \frac{x^n}{n!}$$

Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$, la suite $(v_n)_{n \in N^*}$ est croissante puis que la suite $(w_n)_{n \in N^*}$ est décroissante.

4) En déduire que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$, les deux suites convergent vers la même limite que l'on précisera.

QUATRIEME EXERCICE (6 points)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

On note $fof = f^2$. Ker f désigne le noyau de l'application linéaire f.

1) a) Soit $\vec{u}$ appartenant à Ker f^2.

Vérifier que $f\left(\vec{u}\right)$ appartient à Ker f.

b) En déduire que si Ker $f = \left\{\vec{o}\right\}$ alors Ker $f^2 = \left\{\vec{o}\right\}$.

2) 0 désigne l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout élément de $\mathbb{R}^2$ associe $\vec{o} = (0\,;0)$.

On dit que l'application f est nilpotente d'ordre 2 si $f^2 = 0$ et si $f \neq 0$.

On suppose que f est nilpotente d'ordre 2.

a) Vérifier que $\dim$ Ker $f^2 = 2$.

b) En déduire en utilisant la question 1b que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

c) Soit $\vec{u}$ un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $\left(\vec{u}\right)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

Soit $\vec{w}$ un élément de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$.

Montrer que $f\left(\vec{w}\right)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

d) En déduire qu'il existe un nombre réel non nul unique a tel que $f\left(\vec{w}\right) = a\vec{u}$.

e) Soit $\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{w}$.

Montrer que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer la matrice de l'application linéaire f dans cette base.

3) Application

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admettant pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est nilpotente d'ordre 2.

b) Soit $\vec{u} = (1;1)$. Vérifier que $\left(\vec{u}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

c) Soit $\vec{w} = (1;0)$.

Déterminer le nombre réel a tel que $f\left(\vec{w}\right) = a\vec{u}$.

d) En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$