T. A. - C 2012

ÉPREUVE de MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

<u>Rappel</u> : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (4 points)

Pour tout nombre complexe z non nul on pose : $P(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1$

1) Démontrer que si z est un nombre complexe de module 1, alors $P(z)$ est réel.
   La réciproque est elle vraie ?

2) Soit z un nombre complexe non nul et différent de 1.
   Montrer que $z^2\ P(z)=\frac{1-z^5}{1-z}$.

3) On pose $u=-e^{i\frac{\pi}{5}}$.

   a. Montrer que $u^5=1$.
      En déduire que $P(u)=0$.

   b. Exprimer $u+\frac{1}{u}$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

DEUXIEME EXERCICE (4 points)

1) Soit x un nombre réel.

   a. Développer l'expression $\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-1\right)\times\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$.
   b. Démontrer que : $\cos(3x)=(2\cos(2x)-1)\times\cos(x)$.

2) Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\cos\left(\frac{a}{3^k}\right) > \frac{1}{2}$.

b. En déduire l'existence pour tout entier naturel k de $\ln\left(2\cos\left(\frac{a}{3^k}\right)-1\right)$.

3) On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(2\cos\left(\frac{a}{3^k}\right)-1\right)$.

a. Justifier l'égalité suivante : $U_1 = \ln\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \ln\cos\left(\frac{a}{6}\right)$.

b. Démontrer que , pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $U_n = \ln\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \ln\cos\left(\frac{a}{2\times 3^n}\right)$.

c. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de
$\left(2\cos\left(\frac{a}{3}\right)-1\right)\times\left(2\cos\left(\frac{a}{3^2}\right)-1\right)\times\ldots\times\left(2\cos\left(\frac{a}{3^n}\right)-1\right)$

TROISIEME EXERCICE (12 points)

PARTIE A :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que le vecteur (0 ; 0 ; 1) est un vecteur invariant de f.

2)

a. Montrer que les vecteurs (1, $\sqrt{2}$, -1-$\sqrt{2}$) et (1, -$\sqrt{2}$, -1+$\sqrt{2}$) sont des vecteurs propres de l'application linéaire f .

b. En déduire que la matrice M est diagonalisable.

3) Soit les matrices P et Q définies respectivement par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que la matrice P est inversible.

b. Calculer PQ.

c. Déterminer la matrice inverse de la matrice P.

4) Soit D la matrice diagonale définie par $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$

b. Soit $\alpha_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\beta_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

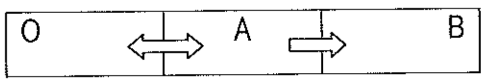
Démontrer que la première colonne de M^n est : $\begin{matrix} \alpha_n+\beta_n \\ \sqrt{2}(\alpha_n-\beta_n) \\ 1-\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha_n-\left(1-\sqrt{2}\right)\beta_n \end{matrix}$

c. En déduire que pour tout entier naturel p la première colonne de M^{2p} est : $\begin{matrix} \frac{1}{2^p} \\ 0 \\ 1-\frac{1}{2^p} \end{matrix}$

puis que la première colonne de M^{2p+1} est : $\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2^p} \\ 1-\frac{1}{2^p} \end{matrix}$.

PARTIE B :

Une souris peut se déplacer dans un tunnel muni de 2 portes .La première peut s'ouvrir dans les deux sens et la seconde que dans un sens.



On modélise cette situation de la façon suivante : Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe.
A chaque instant, il se trouve en un des points O , A , B d'abscisses respectives 0 , 1 , 2.
A l'instant 0, il se trouve en O.

Si à l'instant n , il se trouve en O ,alors à l'instant n+1 , il se trouve obligatoirement en A.

Si à l'instant n , il se trouve en A ,alors à l'instant n+1 , il se trouve soit en O soit en B avec la même probabilité.

Si à l'instant n , il se trouve en B ,alors à l'instant n+1 , il se trouve obligatoirement en B.

Pour tout entier naturel n , on appelle X_n la variable aléatoire prenant pour valeur l'abscisse du mobile à l'instant n et on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$

1) Préciser U_0 ainsi que les probabilités conditionnelles $P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)$, $P_{X_n=1}(X_{n+1}=0)$, $P_{X_n=1}(X_{n+1}=2)$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$P(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}P(X_n=1)$$
$$P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)$$
$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)$$

3) En déduire que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M\, U_n$ où M est la matrice définie dans la partie A . Justifier que $U_n = M^n U_0$.

4) Pour tout entier naturel p, déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X_{2p} et X_{2p+1}.

PARTIE C :

Dans cette partie on pourra utiliser le résultat suivant :

Si a est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$.

On appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point B pour la première fois.

1)

a. Justifier que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, l'évènement $(Y=k)$ est égal à l'évènement $(X_{k-1}=1)\cap(X_k=2)$

b. En déduire que $P(Y=k)=\frac{1}{2}P(X_{k-1}=1)$.

2) Montrer que Y prend pour valeurs les entiers naturels pairs non nuls.

3) Vérifier que pour tout entier naturel non nul p, $P(Y=2p)=\left(\frac{1}{2}\right)^p$

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n} 2p\; P(Y=2p)$.

5) En déduire l'espérance mathématique de Y .