T. A. - C 2013

ÉPREUVE de MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

<u>Rappel</u> : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (6 points)

Une étude statistique montre que la durée de vie exprimée en années d'une pie peut être modélisée par la variable aléatoire D dont la densité de probabilité est la fonction f définie sur R par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{4}\, e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A désigne un nombre réel positif ou nul.

1 -

Soit $I(A) = \int_0^A \frac{x}{4}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx$.

a) Montrer que $I(A) = 1 - \left(\frac{A}{2} + 1\right)\, e^{-\frac{A}{2}}$. On pourra effectuer une intégration par parties.

b) En déduire

$$\lim_{A \to +\infty} I(A).$$

c) Montrer que la fonction f est bien une densité de probabilité.

2 -

a) Déterminer l'intégrale $J(A)$ définie par

$$J(A) = \int_0^A \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x}{2}} \, dx .$$

b) En déduire

$$\lim_{A \to +\infty} J(A).$$

c) Montrer que la variable aléatoire D admet une espérance mathématique que l'on déterminera. Donner une interprétation de la valeur obtenue.

3 -

a) Déterminer $P(D \geq A)$ en fonction de A.

b) Si une pie a vécu au moins une année, quelle est la probabilité qu'elle fête son deuxième anniversaire ?

DEUXIEME EXERCICE (7 points)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 -

a) Rappeler la définition de valeur propre d'une matrice.

b) Vérifier que la matrice A admet 1 comme valeur propre.

c) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de A.

2 -

a) Calculer $(A-I)^2$.

b) Soit λ, valeur propre de la matrice A.
Montrer que $(\lambda-1)^2=0$.

c) En déduire que A n'admet qu'une seule valeur propre.

d) Montrer que la matrice A est inversible.

e) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

3 -

On considère les vecteurs $u_1=(1\,;0\,;-1)$, $u_2=(0\,;1\,;0)$ et $u_3=(0\,;1\,;1)$.

a) Démontrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de l'application linéaire f dans la base (u_1,u_2,u_3).

c) On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1,u_2,u_3).
Donner une relation entre A, P, P^{-1} et T.

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que $T^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

En déduire A^n.

4 -

Pour tout nombre entier naturel n on pose $\alpha_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

On admet que :

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=e.$$

On rappelle que $T^0=I$ et $0!=1$.

Pour tout nombre n entier naturel non nul, on définit la matrice W_n par :

$$W_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}T^k.$$

a) Montrer $W_n=\alpha_n\,I+\alpha_{n-1}\,J$.

b) Soit W la matrice dont les différents coefficients sont les limites respectives des coefficients de la matrice W_n.
Montrer que W=eT.

TROISIEME EXERCICE (7 points)

On considère la suite définie sur IN* par $v_n = \frac{n^n}{n!}$.

1-

a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n $v_n \geq n$.

En déduire que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

2 -

a) Exprimer en fonction de n la différence $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.

b) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$,

$$0 \leq x - \ln(x+1) \leq \frac{1}{2}x^2.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leq 1 + \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \leq \frac{1}{2n}.$$

puis que $0 \leq n - 1 - \ln(v_n) + \ln(v_1) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$.

d) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1[$,

$$x \leq -\ln(1-x).$$

e) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \ln(n-1).$$

f) Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n}\ln(v_n)\right] = 1$$

3 -

On considère la suite définie sur IN* $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

a) Exprimer u_n en fonction de v_n.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).