ÉPREUVE de MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE (8 points)

L'espace vectoriel R^4 est muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4).

Pour tous vecteurs u et v de R^4, on note $u.v$ le produit scalaire des deux vecteurs.

On rappelle que si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ alors

$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.

On considère les vecteurs u_1 et u_2 définis par $u_1 = e_1 + 2e_3 + 2e_4$ et $u_2 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3 + 2e_4$.

On note E le sous espace vectoriel de R^4 engendré par les deux vecteurs u_1 et u_2.

1) Déterminer la dimension du sous espace vectoriel E.

2) Déterminer un vecteur du sous espace vectoriel E, orthogonal au vecteur u_1.

3) On note v_1 le vecteur défini par $v_1 = \frac{1}{3}u_1$ et v_2 le vecteur défini par
$v_2 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$
Démontrer que (v_1, v_2) est une base orthonormée du sous espace vectoriel E.

4) Soit w un vecteur de R^4. On note w' le vecteur de R^4. défini par
$w' = (w.v_1)v_1 + (w.v_2)v_2$.

Montrer que le vecteur w' est le projeté orthonornal du vecteur w sur le sous espace vectoriel E.

5) Déterminer les projetés orthogonaux sur le sous espace vectoriel E des quatre vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4. constituant la base canonique.

6) En déduire la matrice A du projecteur orthogonal sur E dans la base canonique.

7) On considère les vecteurs v_3 et v_4 définis par
$v_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4e_1 - 3e_2 + 2e_3 - 4e_4)$ et $v_4 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2e_1 - 4e_2 - 4e_3 + 3e_4)$.

   a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est une famille orthonormale de vecteurs.
   b) En déduire que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de R^4.

8) Déterminer la matrice D du projecteur orthogonal sur E dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).

9) Soit P la matrice à 4 lignes et 4 colonnes dont les colonnes sont les coordonnées respectives de v_1, v_2, v_3, v_4.

   Soit ${}^tP$ la matrice transposée de la matrice P.

   a) Déterminer le produit ${}^tP \times P$.

   b) Expliquer pourquoi $D = {}^tPAP$ où A et D sont les matrices obtenues respectivement dans les questions 6 et 8.

DEUXIEME EXERCICE (7 points)

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.

   a) Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   b) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2) Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 et soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $u_0 = a$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

   a) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel , $u_n \geq 1$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$, l'inéquation $\sqrt{t} \leq t$.
   c) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

d) Démontrer que pour tout nombre réel t supérieur ou égal à 0, $\sqrt{t}-1 \leq \frac{t-1}{2}$

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{a-1}{2^n}$.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

3)

Soit $(v_n)_{n\in N}$ la suite définie : pour tout n entier naturel, $v_n = 2^n \times (u_n - 1)$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) = \frac{\ln(a)}{2^n}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $-2^{n-1} \times (u_n - 1)^2 \leq \ln(a) - v_n \leq 0$.

On pourra utiliser le résultat de la question 1 b en posant $u_n = 1 + \epsilon_n$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel , $-\frac{1}{2^{n+1}} \times (a-1)^2 \leq \ln(a) - v_n \leq 0$.

d) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in N}$.

TROISIEME EXERCICE (5 points)

On veut comparer l'efficacité de deux méthodes pour réaliser rapidement un contrôle sanitaire sur N bovins répartis en n groupes de même taille r supérieure ou égale à 2. (N=nr) afin de rechercher la présence éventuelle d'une maladie. On sait que la probabilité qu'un bovin soit atteint par cette maladie est de 0,01. De plus, l'origine des animaux permet de considérer que les résultats des tests individuels sont indépendants les uns de autres.

La méthode usuelle consiste à tester les N bovins.

On met en place une nouvelle méthode :

Pour chacun des n groupes, on mélange les prélèvements des r bovins de ce groupe. On analyse les n mélanges ainsi obtenus. Si le résultat d'un groupe est positif alors on analyse séparément les r prélèvements associé à ce groupe.

PARTIE I

1) Déterminer la probabilité que le résultat de l'analyse d'un groupe soit négatif.

2) Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de groupes positifs.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

   b) En déduire l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

3) Soit X le nombre total d'analyses réalisées.

   a) Justifier que $X = n + rY$.

   b) En déduire que $E(X) = \frac{N}{r}[1 + r(1 - 0{,}99^r)]$

PARTIE II

On suppose dans cette partie que N=200

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;200]$ par . $f(x) = 200 \times (\frac{1}{x} + 1 - 0{,}99^x)$.

1) A l'aide de la calculatrice, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

2) Conjecturer un minimum de cette fonction.

3) En déduire la valeur de r rendant minimale l'espérance mathématique de X.

4) Donner une interprétation concrète de ce résultat.