ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE : matrices-probabilités — 6 points

Partie A

Soit α un réel et M_α la matrice carrée d'ordre 3 définie par

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0,4 \\ \alpha & 1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice M_α est inversible.
2. a) Vérifier que 1 est valeur propre de M_α.
   b) Montrer que M_0 est diagonalisable.
   c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice M_α est diagonalisable.
3. On suppose que $\alpha = 0,3$ et on note N la matrice $M_{0,3}$.
   a) Déterminer des matrices D et P où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $N = PDP^{-1}$.
   b) n désigne un entier naturel.
   Déterminer les coefficients de la matrice N^n.

Partie B

L'année 0, on ensemence un champ, avec $\frac{1}{3}$ de plantes de type A, $\frac{1}{3}$ de plantes de type B et $\frac{1}{3}$ de plantes de type C. La végétation de ce champ est exclusivement constituée de ces trois types de plantes. La durée de vie de ces plantes est d'une année.

En début d'année à partir de l'année 1, on ensemence de la manière suivante :
- chaque plante de type A est remplacée par une plante de type A avec une probabilité égale à 0,7 ou par une plante de type B avec une probabilité égale à 0,3.
- chaque plante de type B est remplacée par une plante de type B.
- chaque plante de type C est remplacée par une plante de type A avec une probabilité égale à 0,4 ou par une plante de type B avec une probabilité égale à 0,2 ou par une plante de type C avec une probabilité de 0,4.

n désigne un entier naturel. Au cours de l'année n, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on note son type.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où a_n, b_n, c_n sont respectivement les probabilités que la plante choisie la n-ième année soit de type A, B ou C.

1. Justifier que $a_0 = b_0 = c_0 = \dfrac{1}{3}$.
2. Montrer que $U_{n+1} = NU_n$.
3. Montrer par récurrence que $U_n = N^n U_0$.
4. En utilisant la question **3b** de la partie A, déterminer U_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de b_n. Interpréter ce résultat.

DEUXIEME EXERCICE : suites-intégrales — 7 points

Rappel

Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *la fonction* tan *est définie par* $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.
Sur cet intervalle, tan *est dérivable et on a* $\tan' = 1 + \tan^2$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, +\infty\right[$ et déterminer $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = (f \circ \tan)(x)$.
   a) Déterminer $g(0)$.
   b) Justifier que g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et,
   montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = 1$.
   c) Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Déterminer $g(x)$.
   d) Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B : étude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$

Pour tout réel $a \in \left]0,1\right[$, on note $I(a) = \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$.

1. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, montrer que $I(a) = 2\left(f(1) - f\left(\sqrt{a}\,\right)\right)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{a \to 0} f\left(\sqrt{a}\,\right)$.
3. En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \frac{\pi}{2}$.

Partie C : étude d'une suite

n désigne un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{1+t} dt$.

1. Donner la valeur de I_0.
2. a) Démontrer que $I_n \geqslant 0$.

   b) Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{2}{2n+1}$.

   c) En déduire que $I_n \leq \frac{2}{2n+1}$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$I_0 + (-1)^n I_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

TROISIEME EXERCICE : variables aléatoires **7 points**

Un joueur lance plusieurs fois une pièce équilibrée. On note R_i la variable aléatoire qui, au i-ième lancer, associe 0 si la pièce tombe sur Pile et 1 sinon.
Pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.
Par exemple, si les 11 premiers lancers ont donné successivement :
Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile, Face, Pile
alors la variable X_{11} prend la valeur 6 (six changements aux 3-ième, 4-ième, 5-ième, 8-ième, 10-ième et 11-ième lancers).

1. Soit i un entier naturel non nul. Déterminer la loi de R_i.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. a) Lister toutes les issues possibles lors de 3 lancers d'une pièce.

   b) En déduire la loi de X_3 ainsi que son espérance.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_N.

5. Montrer que :

   a) $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$.

   b) $P(X_N = 1) = (N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$.

6. On pose : $Y_N = X_{N+1} - X_N$.

   a) Déterminer les valeurs prises par Y_N.

   b) Justifier que $P_{(R_N=0)}\big(Y_N = 0\big) = \frac{1}{2}$.
   $P_{(R_N=0)}\big(Y_N = 0\big)$ désigne la probabilité conditionnelle de $\big(Y_N = 0\big)$ sachant $\big(R_N = 0\big)$.

   c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_N et déterminer son espérance.

   d) Montrer que $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$.

   e) Déterminer la nature de la suite $\big(E(X_N)\big)_{N\geq 2}$.

   f) En déduire $E(X_N)$ en fonction de N.