MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER EXERCICE : nombres complexes

n désigne un entier naturel. On considère l'équation (E_n) : $\overline{z}(z-1) = z^n(\overline{z}-1)$.
Par convention $z^0 = 1$.

1. Étude des cas $n = 0$ et $n = 1$.

  a) Résoudre l'équation (E_0) dans $\mathbb{C}$. On pourra poser $z = x + iy$.

  b) Résoudre l'équation (E_1) dans $\mathbb{C}$.

On suppose désormais que $n \geq 2$.

2. Montrer que 0 et 1 sont solutions de (E_n).

3. Montrer que -1 est solution de (E_n) si et seulement si n est impair.

4. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a $|\overline{z}-1| = |z-1|$.
En déduire que si z est une solution non nulle de (E_n) alors $|z| = 1$.

5. Soit z une solution non nulle de (E_n).

   a) Montrer que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

   b) En déduire que z est solution de $(z-1)(z^n+1) = 0$.

6. Étude du cas $n = 3$.

   a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$.

   b) Résoudre l'équation (E_3) dans $\mathbb{C}$.

DEUXIEME EXERCICE : algèbre linéaire

Notations

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Le produit scalaire de u et v est notée $u \cdot v$, on note $u^2 = u \cdot u$ et l'on a $u^2 = \|u\|^2$.
Si E désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $E^\perp$ son sous-espace orthogonal dans $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-3, 1, 5)$.

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille (u, v).

2. Déterminer le nombre réel λ tel que le vecteur $v' = u + \lambda v$ soit orthogonal à u.

3. Pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$, on définit le vecteur w' par $w' = w - \dfrac{(w \cdot u)}{\|u\|^2} u - \dfrac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2} v'$.

   a) Montrer que pour tout vecteur w, on a $w' \in E^\perp$.

Dans la suite, on suppose que $w = (-2, 3, 2)$.

   b) Montrer que $w \notin E$ et $w \notin E^\perp$.

   c) Déterminer le vecteur w' associé à w.

   d) Que peut-on dire de la famille de vecteurs (u, v', w') ?

4. Soit p la projection orthogonale sur E.

   a) Déterminer la matrice A de l'endomorphisme p dans la base (u, v', w').

   b) En déduire la matrice B de l'endomorphisme p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. On considère la matrice C appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Justifier que C est diagonalisable.

   b) Démontrer que le sous-espace vectoriel E est le sous espace propre de s associé à la valeur propre 3.

   c) Que peut-on dire de la base (u, v', w') pour l'endomorphisme s ?

   d) En déduire une expression de la forme $s = \alpha p + \beta Id_{\mathbb{R}^3}$ où α, β sont des réels et $Id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

TROISIEME EXERCICE : variables aléatoires

Une urne contient initialement 1 jeton rouge et 3 jetons bleus indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant :

on tire un jeton de l'urne, on note sa couleur, on le remet dans l'urne en rajoutant 2 jetons de sa couleur.

n désigne un entier naturel non nul.
On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur 0 si le jeton choisi au n-ième tirage est bleu et 1 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et son espérance.

2. **a)** Justifier que $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{5}{8}$.

b) Déterminer la loi conjointe du couple $(X_1,\ X_2)$.

c) En déduire la loi de la variable aléatoire X_2.

d) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$

a) Que représente S_n ?

b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n.

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 et calculer son espérance $E(S_2)$.

4. Justifier que $P_{(S_5=2)}(X_6 = 1) = \frac{5}{14}$.
$P_{(S_5=2)}(X_6 = 1)$ désigne la probabilité conditionnelle de $(X_6 = 1)$ sachant $(S_5 = 2)$.

5. Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

a) Montrer que $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2k+1}{2n+4}$.

b) En déduire que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2n+4} \sum_{k=0}^{n} (2k+1)P(S_n = k)$.

c) En déduire que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{2E(S_n)+1}{2n+4}$.

d) Exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(S_n)$.

e) Justifier que $E(S_{n+1}) = E(S_n) + E(X_{n+1})$.

f) En déduire que $E(S_{n+1}) = \frac{n+3}{n+2} E(S_n) + \frac{1}{2n+4}$.

g) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a $E(S_n) = \frac{n}{4}$.

h) Déterminer la loi de X_n.

QUATRIEME EXERCICE : intégrale-continuité-dérivabilité

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par

$$\begin{cases} f_n(x) &= \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t^2}dt \quad \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f_n(0) &= \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

1. Soit $x \in]0;1]$.

Montrer que pour tout $t \in [0;x]$, on a $\dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$.

2. En déduire que pour tout $x \in]0;1]$, on a

$$\frac{1}{(n+1)(1+x)} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. Étudier la continuité de f_n sur $[0;1]$.

4. Montrer que pour tout réel $x \in]0;1]$, on a

$$f_n(x) + x^2 f_{n+2}(x) = \frac{1}{n+1}.$$

5. Étudier la dérivabilité de f_n sur $[0;1]$.