MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants et comporte 4 pages.

PROBLÈME 1

Partie A : Étude d'une suite

On rappelle que e désigne l'unique réel vérifiant $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et que l'on a $2 < \mathrm{e} < 3$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \ln(u_n + 1) + \ln(2) \end{cases}$$

1. Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.

4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,5. Justifier.

5. Montrer que α vérifie l'égalité $\mathrm{e}^{-\alpha}(1 + \alpha) = \dfrac{1}{2}$.

Partie B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{t}}dt$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, démontrer que :

$$\text{pour tout réel } x \in [0;+\infty[, \text{ on a } \int_0^x te^{-t}dt = 1 - e^{-x}(1+x).$$

2. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, montrer que :

$$\text{pour tout réel } x \in [0;+\infty[, \ F(x) = 2 - 2e^{-\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}).$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Étudier les variations de F sur $[0;+\infty[$.

5. Montrer que α^2 est l'unique solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation $F(x) = 1$.

Partie C : Loi de probabilité

On considère un certain type de bactéries élevées sur un substrat particulier. On suppose que la durée de vie en heures d'une bactérie peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité admettant pour fonction densité de probabilité la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \lambda e^{-\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. On appelle demi-vie d'une bactérie l'instant $t_{1/2}$ en heures tel que $P(X \leq t_{1/2}) = P(X > t_{1/2})$. Montrer que $t_{1/2} = \alpha^2$.

3. Au bout d'un certain temps t_0 en heures, si une bactérie est encore en vie, elle peut se reproduire par division.

On note p la probabilité qu'une bactérie survive jusqu'au temps t_0.

Montrer que $p = e^{-\sqrt{t_0}}(1+\sqrt{t_0})$.

On s'intéresse maintenant au développement d'une colonie de n bactéries, la durée de vie de la i-ème bactérie $(1 \leq i \leq n)$ étant modélisée par une variable aléatoire X_i de même loi que X. Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont supposées indépendantes.

4. a) On note N la variable aléatoire égale au nombre de bactéries ayant survécu jusqu'à l'instant t_0.

Préciser la loi de N, son espérance et sa variance.

b) On considère que la colonie est viable lorsque le nombre moyen de bactéries encore en vie au temps t_0 est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$.

Montrer que la colonie est viable si et seulement si $t_0 \leq \alpha^2$.

PROBLÈME 2

Notation : On note $P_B(A)$ *la probabilité conditionnelle de* A *sachant* B.

Partie A : Diagonalisation d'une matrice

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

1. a) Montrer que 1 est valeur propre de M et déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

b) Calculer MC_1, MC_2 et MC_3.
En déduire que $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ sont aussi valeurs propres de M.

c) Justifier que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

2. Soit n un entier naturel. Exprimer M^n en fonction de n, D et P.

On admettra dans la suite du problème que la première colonne de M^n est égale à

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

Partie B : Étude d'une suite aléatoire

Un étudiant passionné d'informatique a créé un programme générant une suite de nombres composée exclusivement de 0 et de 1 avec les conditions suivantes :

- les deux premiers nombres sont égaux à 1 ;
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 1, le nombre suivant est égal à 1 avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 0, le nombre suivant est égal à 0 avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;

- si deux nombres consécutifs sont distincts, le nombre suivant est égal à 0 ou à 1 avec équiprobabilité.

Exemple d'une suite générée par ce programme :

$$1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \ldots$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « le n-ième nombre est égal à 1 » et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on définit les événements :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

On peut observer sur l'exemple précédent que les événements E_2, G_3, F_4 et H_9 sont réalisés.
On admettra que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{P}(E_n)$, $\mathrm{P}(F_n)$, $\mathrm{P}(G_n)$ et $\mathrm{P}(H_n)$ sont des réels non nuls.

1. Déterminer $\mathrm{P}(E_4)$, $\mathrm{P}(F_4)$, $\mathrm{P}(G_4)$ et $\mathrm{P}(H_4)$.

2. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que $\mathrm{P}_{G_n}(E_{n+1}) = 0$ et $\mathrm{P}_{H_n}(E_{n+1}) = 0$.

b) Montrer que $\mathrm{P}_{E_n}(E_{n+1}) = \mathrm{P}_{E_n}(A_{n+1})$ et $\mathrm{P}_{F_n}(E_{n+1}) = \mathrm{P}_{F_n}(A_{n+1})$.

c) En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n).$$

On admet les égalités suivantes :

$$\mathrm{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(H_n),\ \mathrm{P}(G_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) \text{ et } \mathrm{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(H_n).$$

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_n) \\ \mathrm{P}(F_n) \\ \mathrm{P}(G_n) \\ \mathrm{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$.

b) En déduire une expression de U_n en fonction de n, M et U_2.

4. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer U_2.

b) En déduire $\mathrm{P}(E_n)$ et $\mathrm{P}(F_n)$ en fonction de n. Justifier la réponse.

c) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{P}(E_n)$.

Partie C

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au n-ième nombre généré par le programme.

1. Déterminer la loi de X_4.

2. Déterminer la loi et l'espérance de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3.

3. Déterminer tous les entiers n non nuls vérifiant $\mathrm{P}(X_n = 1) > \frac{1}{2}$. Conclure.
