MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants et comporte 7 pages.

Résultats et notations

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes de dimension 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Soit M une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note C_M le polynôme caractéristique de M défini par :

$$C_M(X) = det\,(M - XI_3) \text{ où } I_3 \text{ désigne la matrice identité de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On utilisera les définitions suivantes :

Définition 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ lorsque les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n \end{pmatrix}$$

Définition 2
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}^{(n)}$ le coefficient de M_n se situant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ lorsque pour tout i et j entre 1 et 3 les suites de coefficients $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_{1,1}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{1,2}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{1,3}^{(n)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2,1}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2,2}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2,3}^{(n)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_{3,1}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{3,2}^{(n)} & \lim\limits_{n\to+\infty} a_{3,3}^{(n)} \end{pmatrix}$$

On admettra les résultats suivants :

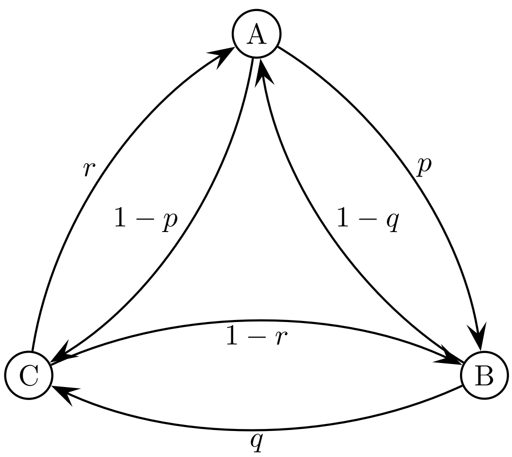
Propriété 1
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices convergeant vers la matrice M dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors :

- pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la suite $(AM_nB)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice AMB,
- pour tout vecteur colonne X de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite $(M_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur colonne MX.

Propriété 2
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs colonnes convergeant vers le vecteur colonne X dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ alors pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la suite $(AX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur colonne AX.

PROBLÈME 1

On s'intéresse à un système dynamique probabiliste pouvant prendre 3 états A, B et C à l'exclusion de tout autre. À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), le système ne peut être que dans un unique état. L'instant $n = 0$ correspond à l'instant initial. À chaque pas de temps, le système passe d'un état à un état différent. On note p la probabilité que le système passe de l'état A à l'état B, q la probabilité que le système passe de l'état B à l'état C et r la probabilité que le système passe de l'état C à l'état A.
Le système peut être représenté par le graphe suivant :



Soit n un entier naturel. On note :

- a_n la probabilité que le système soit dans l'état A à l'instant n,
- b_n la probabilité que le système soit dans l'état B à l'instant n,
- c_n la probabilité que le système soit dans l'état C à l'instant n.

On suppose que le système est initialement dans l'état A.

Partie A : Préliminaires

1. On considère deux réels x et y dans l'intervalle $[0;1]$.

a) Montrer que $0 \leqslant xy \leqslant y$.

b) En déduire que $xy = 1 \iff x = y = 1$.

2. On considère trois réels $x,\ y$ et z dans l'intervalle $[0;1]$. On suppose que $x \leqslant 1 - y$.

a) Montrer que $x(1-z) + z(1-y) \leqslant 1 - y$.

b) En déduire que $x(1-z) + z(1-y) + y(1-x) \leqslant 1$.

On admettra dans la suite du problème que pour tous réels $x,\ y,\ z$ dans l'intervalle $[0,1]$, on a $x(1-z) + z(1-y) + y(1-x) \leqslant 1$.

Partie B : Étude du cas $p = q = r = \dfrac{1}{2}$

1. Relation de récurrence.

a) Justifier que $a_0 = 1$.

b) Déterminer $b_0,\ c_0$ puis $a_1,\ b_1$ et c_1.

c) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $a_n + b_n + c_n = 1$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - \dfrac{1}{3}$.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b) En déduire une expression de a_n en fonction de n.

c) Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En donner une interprétation pour le système dynamique probabiliste.

3. On considère la suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et la matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

b) En déduire pour tout entier naturel n, une expression de X_n en fonction de n, M et X_0.

c) Justifier que la matrice M est diagonalisable.

d) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

e) En déduire que la suite des exposants de M (c'est-à-dire la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge.

f) Montrer que la suite (X_n) converge vers un vecteur propre de la matrice M.

g) Retrouver le résultat de la question **2c** de la partie B.

Partie C : Étude du cas $p = 0$ et $q = r = \frac{1}{2}$

On considère la suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = MX_n$.

1. Calculer le polynôme caractéristique C_M de la matrice M.

2. Vérifier que 1 est valeur propre de M.

3. Démontrer que la matrice M n'est pas diagonalisable.

Partie D : Cas général

Pour tout entier naturel n, on considère les vecteurs colonnes $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & (1-q) & r \\ p & 0 & (1-r) \\ (1-p) & q & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = MX_n$.
On note $a = p(1-q) + q(1-r) + r(1-p)$.
On admet que le polynôme caractéristique C_M de la matrice M est égal à

$$C_M(X) = -(X-1)(X^2 + X + 1 - a)$$

.

1. Vérifier que le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 1-q(1-r) \\ 1-r(1-p) \\ 1-p(1-q) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.
On pourra utiliser les résultats de la partie A.

2. Montrer que si $a > \dfrac{3}{4}$ la matrice M est diagonalisable.

3. Démontrer que $a \leqslant 1$.
On pourra utiliser les résultats de la partie A.

4. On suppose désormais que $\dfrac{3}{4} < a < 1$.

a) Montrer qu'il existe deux réels α et β appartenant à l'intervalle $]-1;0[$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tels que

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

b) En déduire que la suite des exposants de M (c'est-à-dire la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge.

c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de la matrice M.

d) En déduire une expression de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ en fonction de $p,\ q,\ r$ et a.
Cette limite dépend-elle de l'état initial du système ?

e) Interpréter ce dernier résultat pour le système dynamique probabiliste.

PROBLÈME 2

Ce problème consiste à étudier le modèle d'évolution de population proposé par Pierre-François Verhulst. Ce modèle tient compte de la surabondance de la population par rapport aux ressources disponibles contrairement à la croissance exponentielle développée par Malthus. Verhulst considère qu'il existe une taille limite de la population dépendant des ressources du milieu. En dessous de cette taille limite la population augmente et au-dessus de cette taille limite la population diminue.

Partie A : Étude du modèle discret

On considère une population d'individus.
On note u_n le nombre d'individus dans la population à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$). u_0 est donc le nombre d'individus de la population à l'instant initial.
Dans le modèle de Verhulst la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = -0,005u_n^2 + 1,5u_n$.

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = -0,005x^2 + 1,5x$.
Étudier les variations de ϕ sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose $0 < u_0 < 100$.

- **a)** Montrer que pour tout entier n, on a $0 < u_n < 100$.
- **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- **c)** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On suppose $100 < u_0 < 150$.

- **a)** Montrer que pour tout entier n, on a $100 < u_n < 150$.
- **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

4. Donner une interprétation de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cadre du modèle de Verhulst.

Partie B : Étude du modèle continu

On considère une population d'individus.
On note $N(t)$ le nombre d'individus dans la population à l'instant t ($t \in [0; +\infty[$).
On note $N_0 = N(0)$ la taille de la population à l'instant initial $t = 0$. On suppose $N_0 > 0$.
Dans le modèle de Verhulst la fonction N est dérivable sur $[0; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle $y' = 0,005y\ (100 - y)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = N(t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

- **a)** Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
- **b)** Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -0,005N(t)\ y$.
- **c)** En déduire qu'il existe une fonction g définie sur $[0; +\infty[$ et un réel $K > 0$ tels que :

$$\text{pour tout } t \in [0; +\infty[\,,\ f(t) = K\mathrm{e}^{g(t)}.$$

2. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

- **a)** Justifier que la fonction h est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
- **b)** Montrer que h est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,5y + 0,005$.
- **c)** Trouver une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle (E).

d) En déduire que la fonction N est définie pour tout $t \in [0;+\infty[$ par $N(t) = \dfrac{100}{\left(\frac{100}{N_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-0,5t} + 1}$.

Dans la suite, on admet que la fonction N est définie sur $[0;+\infty[$ par $N(t) = \dfrac{100}{\left(\frac{100}{N_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-0,5t} + 1}$.

3. On rappelle que $N_0 > 0$.

a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.

b) Étudier les variations de N sur $[0;+\infty[$.
On pourra distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur de N_0.

c) Donner une interprétation de ces deux derniers résultats (questions **3a** et **3b**) dans le cadre du modèle de Verhulst.

4. On suppose que $0 < N_0 < 50$. N'' désigne la dérivée seconde de N c'est-à-dire la dérivée de N'.

a) Justifier que la fonction N est deux fois dérivable et montrer que

$$\forall t \in [0;+\infty[\,,\ N''(t) = 0,005^2 N(t)(100 - N(t))(100 - 2N(t))$$

b) En déduire qu'il existe un unique réel t_0 dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $N''(t_0) = 0$.

c) Verhulst considérait que la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où la taille de la population atteint la moitié de sa valeur limite.
En considérant t_0 et $N(t_0)$, justifier l'affirmation de Verhulst.

d) Montrer que $\mathrm{e}^{0,5t_0} = \dfrac{100}{N_0} - 1$.

5. On suppose que $0 < N_0 < 50$.
Verhulst appelait deuxième âge de la croissance de la population la période se situant entre les instants 0 et t_0, et troisième âge la période se situant entre les instants t_0 et $2t_0$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a $N(t) = \dfrac{100\mathrm{e}^{0,5t}}{\mathrm{e}^{0,5t} + \left(\frac{100}{N_0} - 1\right)}$.

b) En déduire une primitive de la fonction N sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Montrer que la valeur moyenne de N sur la période s'étendant sur les deuxième et troisième âges selon Verhulst est égale à 50.
On appelle valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.