Banque « Agro-Véto »
C - 0522

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants.

Problème 1. Réversibilité d'une détente de gaz

En physique et en chimie, la question de la réversibilité d'une transformation est importante. Elle peut être résumée et simplifiée à :

> Si une situation s'est produite à un moment donné, peut-elle se reproduire de façon identique ultérieurement ?

On considérera ici l'expérience suivante : un gaz se trouve dans une enceinte fermée. Au temps $t = 0$, on ouvre un trou dans l'enceinte, donnant sur une seconde enceinte vide au départ. Le gaz va alors se diffuser dans la seconde enceinte.

Les équations de la cinématique indiquent que chaque molécule peut aller dans l'une ou l'autre des enceintes, et la transformation serait alors réversible ; *a contrario*, les équations de la thermodynamique impliquent une augmentation de l'entropie, qui ne peut diminuer par la suite : la transformation est alors irréversible.

Ce problème est constitué de deux parties largement indépendantes ; seule la sous-partie II.C utilisera des résultats vus dans la partie I.

Partie I. Approche thermodynamique

On considère la situation suivante : un certain nombre de molécules N se trouve dans une première enceinte rigide.

On considère le temps discrétisé, commençant au temps $n = 0$. Au temps $n = 0$, on perce dans la paroi de l'enceinte un petit trou donnant sur une deuxième enceinte de même volume, initialement vide.

On notera alors u_n (respectivement v_n) le nombre de molécules de gaz dans la première (respectivement deuxième) enceinte au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner u_0 et v_0.
2. Justifier que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, puis exprimer u_n en fonction de v_n.

Les principes de la thermodynamique, sous certaines hypothèses qu'on n'exposera pas ici, permettent d'affirmer que le nombre de molécules passant de la première enceinte à la seconde (respectivement de la seconde à la première) du temps n au temps $n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$, est proportionnel au nombre de molécules dans la première (respectivement seconde) enceinte au temps n. Le coefficient de proportionnalité est supposé le même au cours du temps aussi bien de la première enceinte vers la deuxième que de la deuxième vers la première, et sera noté K, $K \in]0, 1[$.

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = KN + (1 - 2K)u_n.$$

On suppose désormais que ce réel vérifie $K \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

4. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_n - \frac{N}{2}$$

   est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
5. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}(1 - 2K)^n.$$

6. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on précisera.
8. Déterminer la distribution des molécules au bout d'un temps très long.
9. Avec ce modèle, la transformation est-elle réversible ?

Partie II. Approche probabiliste

On rappelle le contexte de la partie précédente : N molécules sont présentes dans une enceinte, puis on perce au temps $t = 0$ un trou donnant dans une autre enceinte. On suppose que le temps est discrétisé : les instants seront numérotés 0, 1, 2, etc.

Les enceintes seront ici représentées par deux urnes : l'urne U contenant les molécules au départ, l'urne V étant vide au départ.

Les molécules sont supposées être numérotées de 1 à N. À chaque instant, on suppose qu'une et une seule molécule change d'urne (le trou est supposé assez petit pour ne laisser passer qu'une seule molécule).

Pour modéliser cette évolution, on tirera au hasard uniformément un entier entre 1 et N, et on supposera que c'est la molécule portant ce numéro qui change d'urne.

On notera alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- B_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans l'urne U à l'instant k ;
- X_k le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(B_k = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(B_k = N) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ où :

  $\mathbb{P}(B_k = 0)$ est la probabilité que la variable B_k prenne la valeur 0 et $\mathscr{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $(N+1)$ lignes et 1 colonne à coefficients dans l'ensemble des réels.

II.A Le cas de trois boules

Dans cette partie, on suppose que l'urne U contient trois boules au départ, et l'urne V aucune. On a donc $N = 3$.

10. Donner le vecteur colonne X_0.
11. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que :
$$\mathbb{P}(B_{k+1} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_k = 1) \text{ et } \mathbb{P}(B_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(B_k = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(B_k = 2).$$
12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$, avec M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$
13. Calculer alors les vecteurs X_1 et X_2.
14. Déterminer le polynôme caractéristique de M puis calculer ses valeurs propres.
(On pourra utiliser la calculatrice en expliquant néanmoins brièvement la démarche.)
15. La matrice M est-elle diagonalisable ? On justifiera la réponse.
16. Soit S la matrice définie par $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Donner S^2. En déduire que S est inversible et exprimer S^{-1} en fonction de S.
17. Justifier que la matrice $D = S^{-1}MS$ est diagonale et expliciter ses coefficients.
18. En déduire une expression de X_k en fonction de k.
19. Calculer la limite de $\mathbb{P}(B_{2k} = 3)$ quand k tend vers l'infini.
20. Que peut-on en déduire, dans ce modèle, quant à la réversibilité de la détente de gaz ?

II.B Le cas de deux boules

On rappelle le contexte de la partie précédente : les enceintes sont représentées par des urnes U et V, et on suppose qu'à chaque instant, une et une seule molécule passe d'une urne à l'autre. Pour modéliser cette situation, on suppose les molécules numérotées de 1 à N, et on tire aléatoirement et uniformément un entier entre 1 et N; c'est la molécule portant ce numéro qui changera d'urne.

Dans cette partie, on suppose que $N = 2$, c'est-à-dire que l'urne U contient deux boules au départ, et l'urne V aucune. On note toujours B_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans l'urne U à l'instant k.

On cherche dans cette partie à déterminer le temps de retour moyen à l'état initial (deux boules dans l'urne U et aucune dans l'urne V).

<u>Notation :</u> Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On note $min(F)$ le minimum de cet ensemble F.

Soit alors $M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 1$. On considère la variable aléatoire R_M comptant le nombre d'étapes jusqu'au premier retour à l'état initial si ce retour arrive durant les $2M$ premiers tirages, et qui vaut 0 sinon. Formellement, on a donc pour $M \geqslant 1$:

$$R_M = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in [\![1, 2M]\!],\ B_k < 2 \\ \min\{k \in [\![1, 2M]\!] \mid B_k = 2\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par exemple, si $B_0 = 2$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$, $B_3 = 1$, $B_4 = 0$, $B_5 = 1$, $B_6 = 2$, $B_7 = 1$ et $B_8 = 2$, on aura $R_3 = 6$ et $R_4 = 6$ mais $R_2 = 0$.

21. Déterminer $\mathbb{P}(R_3 = i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (On pourra commencer par représenter les premières étapes de cette situation par un arbre, un schéma,...)
22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant 2M$, on a :

$$\mathbb{P}(R_M = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}.$$

23. En déduire que :

$$\mathbb{E}(R_M) = \sum_{j=1}^{M} \frac{j}{2^{j-1}}.$$

24. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
    (a) On définit la fonction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{p} x^k \end{array}.$$

    Donner une expression sans symbole $\sum$ de la fonction φ.

    (b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{p} kx^{k-1} = \frac{px^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(x-1)^2}.$$

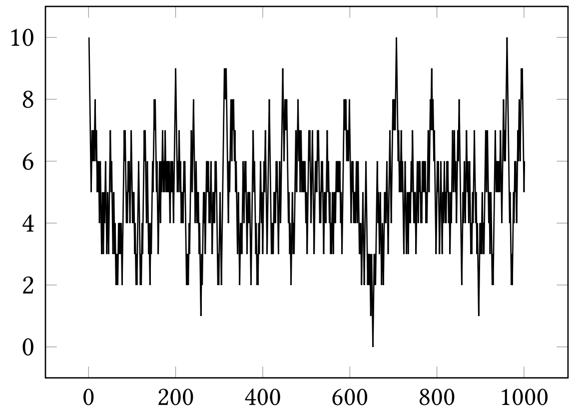
25. En déduire la limite quand $M \to +\infty$ de $\mathbb{E}(R_M)$. Que représente cette quantité ?

II.C Simulations dans le cas d'un plus grand nombre de boules

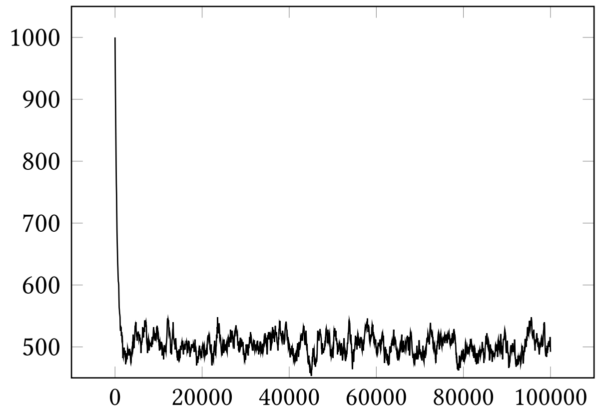
On admet que les résultats précédents restent vrais dans le cas de N boules, $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque c'est-à-dire :

- la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n = N)$ est non nulle ;
- le temps de retour moyen à la situation initiale est 2^N.

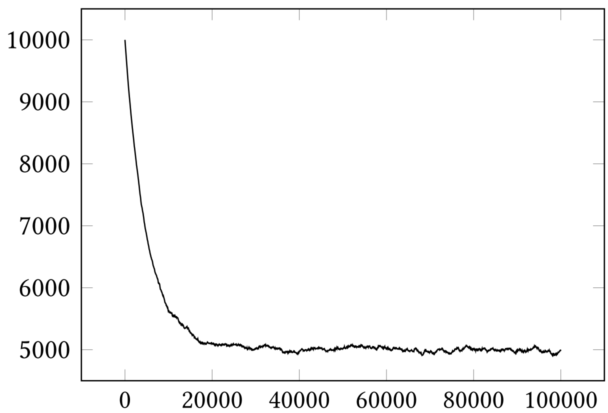
Une simulation informatique permet d'obtenir les graphiques suivants, indiquant en abscisse le nombre d'étapes et en ordonnée le nombre de boules dans l'urne U.



$N = 10$



$N = 1000$



$N = 10000$

26. Pour chacun de ces trois graphiques, indiquer en expliquant si la transformation semble plutôt réversible ou irréversible.
27. On considère dans cette fin de problème qu'il se produit un échange de molécule par nanoseconde.

    Comparer le temps moyen de retour à la situation initiale moyen dans le cas de $N = 10000$ molécules avec l'âge de l'univers, estimé à 5×10^{17} secondes.

    On pourra utiliser l'approximation $2^{10} \approx 10^3$.
28. Expliquer alors le paradoxe apparent entre les simulations et les résultats précédents.

Problème 2. Évolution d'une population de bactéries

Dans l'industrie agroalimentaire, un des principaux points à surveiller est la présence de la bactérie *Listeria monocytogenes* dans les aliments. La présence de cette bactérie à des taux trop élevés peut amener à un rappel de produits, occasionnant une perte financière pour l'entreprise ou, si elle n'a pas été détectée, à la contamination de consommateurs du produit.

Dans ce problème, nous allons alors étudier différents modèles d'évolution de cette bactérie, pour tenter de prévoir le risque associé à la présence de *Listeria*.

On appellera alors N la fonction qui à un temps $t \in \mathbb{R}_+$ associe le nombre de bactéries à ce temps.

On notera N_0 le nombre de bactéries au temps $t = 0$: $N(0) = N_0 \geqslant 0$.

On appellera point d'équilibre d'un modèle représenté par une équation différentielle toute fonction constante solution de l'équation.

Partie I. Modèle de Malthus

Dans *An essay on the principle of population* en 1826, Thomas Malthus émet l'hypothèse qu'une population croît proportionnellement au nombre de personnes composant cette population.

On considère alors dans cette partie que la fonction N vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = \alpha N(t),$$

où α est un paramètre strictement positif.

1. Donner une expression de la fonction N en fonction de α, t et N_0.
2. Ce modèle est-il réaliste ? Pourquoi ?

Partie II. Modèle de Von Bertalanffy

Pour pallier le problème du modèle précédent, on considère un paramètre $K \geqslant N_0$ correspondant à la capacité limite de la population.

Karl Ludwig von Bertalanffy propose alors en 1938 le modèle suivant :

$$\forall t \geqslant 0,\ N'(t) = \alpha\left[K - N(t)\right],$$

avec $\alpha > 0$.

3. Ce modèle admet-il des points d'équilibre ?
4. Trouver une solution particulière à l'équation différentielle précédente puis déterminer une expression de la fonction N en fonction de α, K, t et N_0.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction N en y faisant apparaître les limites aux bornes de l'intervalle de définition, puis dessiner l'allure de sa courbe représentative.
6. Que se passe-t-il s'il n'y a aucune bactérie au temps $t = 0$? Est-ce réaliste ?

Partie III. Modèle de Gompertz

Un autre modèle de croissance des populations a aussi été proposé par Benjamin Gompertz en 1825, prenant en compte la mortalité liée à l'âge.

Ce modèle peut être représenté par l'équation différentielle suivante, où $\alpha > 0$ et $K \geqslant N_0$ est la capacité limite :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = \alpha N(t) \ln\left[\frac{K}{N(t)}\right].$$

On suppose de plus que $N_0 > 0$.

7. Montrer que ce modèle admet un unique point d'équilibre que l'on précisera.
8. On admet que la fonction N ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $u(t) = \ln\left[\frac{K}{N(t)}\right]$.
   Montrer que u vérifie l'équation $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u'(t) = -\alpha u(t)$.
9. Trouver alors une expression de la fonction N en fonction t et de N_0.
10. Dresser le tableau de variations de la fonction N en y faisant apparaître les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis dessiner l'allure de sa courbe.
11. On considère un gramme de nourriture contenant $N_0 = 10$ bactéries de *Listeria monocytogenes*.
    On donne pour cette bactérie $\alpha = 0,84$ (exprimé en h^{-1}) et $K = 16000$.
    On estime qu'un gramme de cet aliment ne doit pas être consommé s'il contient plus de 1000 cellules de *Listeria monocytogenes*.
    Déterminer combien d'heures on peut conserver cet aliment sans danger en utilisant le modèle de Gompertz.

Partie IV. Modèle avec substrat

Dans cette partie, on ne prend plus en compte la mortalité liée à l'âge des bactéries.
On considère maintenant que les bactéries ne peuvent se multiplier que si elles peuvent se nourrir d'un substrat. On notera maintenant $S(t)$ la quantité de substrat présente à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$, et on suppose qu'à l'instant initial, on a $S_0 = S(0)$ molécules de substrat.

Une bactérie ne pourra alors se multiplier qu'après avoir pu consommer $p \in \mathbb{N}^*$ molécules de substrat.

Dans ces conditions, on peut prouver que S et N vérifient les équations :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \begin{cases} S'(t) = -\frac{\alpha}{p} S(t)N(t) \\ N'(t) = \alpha S(t)N(t) \end{cases}$$

12. Justifier que la fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & N(t) + pS(t) \end{array}$ est une fonction constante.

On notera λ la valeur de cette constante.

13. Montrer alors que la fonction N vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = \frac{\alpha}{p}\lambda\left[1 - \frac{N(t)}{\lambda}\right]N(t).$$

14. On admet que la fonction N ne s'annule pas, et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $v(t) = \frac{1}{N(t)}$.
    Montrer que v vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
15. En déduire une expression de $N(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.
16. Quelle est la limite quand t tend vers l'infini des fonctions N et S? Expliquer ces limites.

FIN DU SUJET