**Banque « Agro-Véto »**
**C - 0523**

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 3 heures**

**L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.**

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de trois problèmes totalement indépendants.

## Problème 1. Paradoxe de Parrondo

Dans ce problème, nous allons étudier deux jeux de type « Pile ou Face », utilisant des pièces truquées. Ces deux jeux seront appelés **Jeu A** et **Jeu B**. Pour ces deux jeux, le joueur gagnera un point chaque fois qu'il obtient **Pile**, et perdra un point chaque fois qu'il obtiendra **Face**.

On notera alors $G_n$ le nombre de points au bout de $n$ lancers de pièce. Au départ, le joueur n'a aucun point, et donc $G_0 = 0$.

Ce problème comporte quatre parties. Les parties A et B sont indépendantes et peuvent utiliser des résultats de la partie Préliminaires. La partie C dépend des parties précédentes.

### Préliminaires

Dans cette partie, on démontre des résultats techniques, qui serviront dans les autres parties.

On dira qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = \begin{pmatrix} a_n & d_n & g_n \\ b_n & e_n & h_n \\ c_n & f_n & i_n \end{pmatrix}$ converge si chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite sera alors notée $A_\infty = \begin{pmatrix} \lim a_n & \lim d_n & \lim g_n \\ \lim b_n & \lim e_n & \lim h_n \\ \lim c_n & \lim f_n & \lim i_n \end{pmatrix}$, toutes les limites étant quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1.** (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite géométrique réelle converge.

(b) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale, $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x_1$, $x_2$ et $x_3$ pour que la suite $(A^n)$ converge.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que $A$ est *stochastique* si la somme des termes de chaque colonne vaut 1, c'est-à-dire si

$$\forall j \in [\![1,3]\!],\ a_{1,j} + a_{2,j} + a_{3,j} = 1.$$

**2.** (a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est stochastique.

**3.** Vérifier que si une suite de matrices stochastiques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ converge, alors sa limite est stochastique.

## Partie A. Étude du jeu A

Dans ce jeu **A**, on lance une pièce truquée donnant **Pile** avec une probabilité $p_A = 0,49$.

On note $R_n$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le $n$-ième lancer donne **Pile**, et $-1$ sinon.

Pour tout entier $n$, on note alors $G_n$ le nombre de points du joueur après $n$ répétitions du jeu **A**. Les lancers successifs sont supposés indépendants.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner la loi de $R_n$.

(b) En déduire l'espérance de $R_n$.

**5.** (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $G_n$ en fonction des $R_k$.

(b) En déduire l'espérance de $G_n$.

**6.** Donner alors la limite de la suite $(\mathbb{E}(G_n))$ quand $n$ tend vers l'infini.

**7.** Le jeu **A** est-il favorable ou défavorable au joueur ?

## Partie B. Étude du jeu B

Ce jeu utilise deux pièces, notées $P_1$ et $P_2$. La pièce $P_1$ donne **Pile** avec une probabilité $p_1 \in ]0,1[$, et la pièce $P_2$ donne **Pile** avec une probabilité $p_2 \in ]0,1[$.

Le jeu **B** se joue alors de la façon suivante :

- si le nombre de points du joueur est un multiple de 3, alors il lance la pièce $P_2$ ;
- sinon, il lance la pièce $P_1$.

On rappelle que le joueur gagne un point s'il obtient **Pile** et perd un point s'il obtient **Face**.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au reste dans la division de $G_n$ par 3 ; par exemple, si $G_n = 4$ ou $G_n = 7$ alors $X_n = 1$, si $G_n = 5$ ou $G_n = 11$ alors $X_n = 2$ et si $G_n = -12$ ou $G_n = 6$ alors $X_n = 0$. On notera alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0)\\ \mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\end{pmatrix}$.

**8.** Rappeler $G_0$ et expliciter le vecteur $Y_0$.

**9.** (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1 - p_1)\mathbb{P}(X_n = 1) + p_1\mathbb{P}(X_n = 2).$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = MY_n$, où $M$ désigne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 - p_1 & p_1 \\ p_2 & 0 & 1 - p_1 \\ 1 - p_2 & p1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On détaillera les calculs pour les deux premières lignes de la matrice.*

**10.** (a) Soient $a = 1 - p_1(1 - p_1)$, $b = 1 - p_1(1 - p_2)$ et $c = 1 - p_2(1 - p_1)$. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre 1.

Dans toute la suite du problème, on utilisera les valeurs $p_1 = 0,74$ et $p_2 = 0,09$.

(b) À l'aide de la calculatrice, donner le polynôme caractéristique de $M$, puis donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près de ses valeurs propres.

(c) Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice inversible $P$, de première colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et deux réels $\lambda, \mu \in ]-1, 1[$ tels que

$$M = PDP^{-1}, \qquad \text{où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

**11.** Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

**12.** Calculer la limite $D_\infty$ de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet alors dans la suite du problème que la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers la matrice

$$M_\infty = PD_\infty P^{-1}.$$

**13.** On note $d$, $e$ et $f$ les coefficients de la première ligne de $P^{-1}$. Montrer que

$$M_\infty = \begin{pmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{pmatrix}.$$

**14.** En utilisant les résultats des questions 2 et 3, montrer que

$$d = e = f = \frac{1}{a + b + c}.$$

**15.** Montrer alors que la suite $(Y_n)$ converge, vers la matrice

$$Y_\infty = \frac{1}{a + b + c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On note alors $X_\infty$ la variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,2\}$ définie par $\mathbb{P}(X_\infty = i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$. On a donc

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = \frac{a}{a+b+c},\ \mathbb{P}(X_\infty = 1) = \frac{b}{a+b+c} \text{ et } \mathbb{P}(X_\infty = 2) = \frac{c}{a+b+c}.$$

On estime alors qu'après un grand nombre de parties, on peut approximer le jeu **B** par le jeu **B'** suivant :

- on tire un entier parmi 0, 1 et 2, dont la probabilité d'apparition suit la loi donnée par $X_\infty$.
- si on obtient 0, on joue avec la pièce $P_2$.
- sinon, on joue avec la pièce $P_1$.

On note alors $S_n$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient **Pile** à ce jeu au $n$-ième lancer, et $-1$ sinon. On note de plus $H_n$ le nombre de points du joueur après $n$ parties du jeu **B'**.

**16.** Construire un arbre de probabilité correspondant au jeu **B'**.

**17.** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a

$$\mathbb{E}(S_n) = (2p_2 - 1)\mathbb{P}(X_\infty = 0) + (2p_1 - 1)\left[\mathbb{P}(X_\infty = 1) + \mathbb{P}(X_\infty = 2)\right].$$

**18.** Exprimer $\mathbb{E}(H_n)$ en fonction de $E(S_n)$.

**19.** On trouve numériquement $\mathbb{E}(S_n) \approx -0,0174$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(H_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

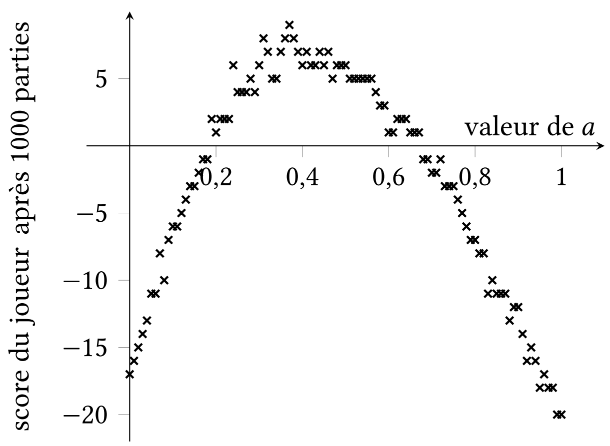
**20.** Le jeu **B'** (et donc le jeu **B** par approximation) est-il favorable au joueur ?

## Partie C. Mélange des jeux A et B

On réalise maintenant le jeu suivant :

- on lance une nouvelle pièce donnant **Pile** avec une probabilité $a \in [0,1]$.
- si elle donne **Pile**, on joue au jeu **A**.
- sinon, on joue au jeu **B**.

Le graphique suivant donne une simulation informatique du score d'un joueur après mille parties, en fonction du paramètre $a \in [0,1]$.




**21.** Le mélange des jeux **A** et **B** selon les conditions décrites ci-dessus peut-il être favorable au joueur ?

**22.** Expliquer alors en quoi cette situation constitue un *paradoxe*.

## Problème 2. Inégalité isopérimétrique pour le triangle

Les problèmes isopérimétriques sont apparus il y a environ trois mille ans et consistent à chercher quelles courbes fermées permettent, à périmètre fixé, de maximiser l'aire contenue dans la courbe.

Par exemple, on peut prouver que parmi les courbes quelconques de périmètre fixé, le cercle est celle permettant d'obtenir une aire maximale.

Dans ce problème, on va s'intéresser à un problème isopérimétrique plus simple : quelle est l'aire maximale d'un triangle de périmètre fixé ?

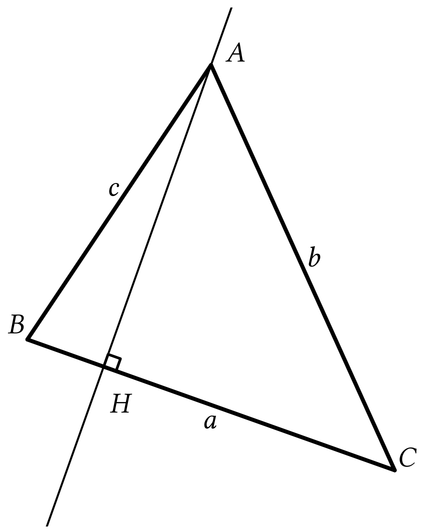
Ce problème est composée de trois parties, la partie B dépendant de la partie A, et la partie C dépendant des parties A et B.

### Partie A. La formule de Héron

L'objectif de cette partie est de démontrer la formule de Héron :

> pour un triangle $ABC$, de côtés ayant pour longueurs $a$, $b$ et $c$, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle est donnée par :
> $$\mathscr{A} = \sqrt{q(q-a)(q-b)(q-c)} \text{ où } q = \frac{a+b+c}{2}.$$

Une situation est représentée par le dessin suivant, où $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(BC)$ :




On rappelle alors la formule donnant l'aire $\mathscr{A}$ du triangle $ABC$ : $\mathscr{A} = \frac{BC \times AH}{2}$.

**1.** Montrer que dans un triangle non plat, c'est-à-dire tel que ses sommets ne soient pas alignés, au moins l'une des hauteurs coupe le segment opposé.

Quitte à échanger les sommets, on suppose donc dans la suite que le point $H$ appartient au segment $[BC]$.

**2.** Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$.

*On pourra calculer* $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ *de deux façons différentes.*

**3.** En déduire que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$.

**4.** En déduire la valeur de $BH$, puis de $AH$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

**5.** Démontrer alors la formule de Héron.

*On donnera le détail des calculs.*

### Partie B. Inégalité isopérimétrique pour les triangles dont un côté est fixé

Soient deux points distincts du plan notés $A$ et $B$. On fixe un paramètre $p \in \mathbb{R}_+^*$, $p \geqslant AB$. On cherche alors, parmi tous les triangles de périmètre $p$ et ayant $[AB]$ pour un côté, le triangle d'aire maximale.

On fixe un tel triangle et on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Les points $A$ et $B$, le périmètre $p$, ainsi que la longueur $c = AB$, sont donc fixés.

**6.** On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \left(\frac{p}{2} - a\right)\left(a + c - \frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2} - c\right) \end{array}.$$

Justifier que la fonction $f$ admet un maximum, en un réel $a_{\max}$ que l'on précisera.

**7.** Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle $ABC$ en fonction uniquement de $f(a)$ et $p$.

**8.** Si $a = a_{\max}$, calculer la valeur $b_{\max}$ de $b$ correspondante, en fonction de $c$ et $p$.

**9.** Que peut-on en déduire sur la nature du triangle $ABC$ ?

### Partie C. Inégalité isopérimétrique pour les triangles quelconques

Dans cette partie, on fixe un paramètre $p \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche alors à déterminer la nature des triangles de périmètre $p$ dont l'aire est maximale.

Soit alors $ABC$ un tel triangle, de paramètre $p$ et d'aire maximale.

**10.** Montrer que si $ABC$ n'est pas équilatéral, par exemple si $BC \neq AC$, alors il existe un triangle isocèle $ABC'$, de périmètre $p$, et d'aire strictement supérieure à celle de $ABC$.

**11.** En déduire la nature du triangle $ABC$.

**12.** Montrer que pour tout triangle de périmètre $p$, son aire $\mathscr{A}$ vérifie

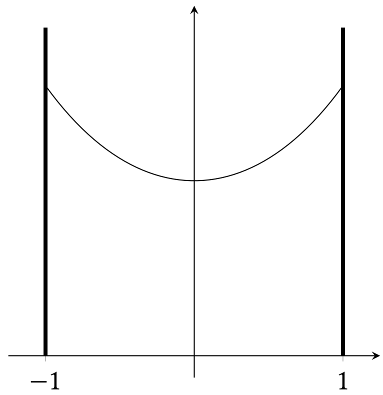
$$\mathscr{A} \leqslant \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

## Problème 3. La chaînette

On admet que si on tend un câble entre deux poteaux, le câble n'étant soumis qu'à son propre poids et accroché des deux côtés à la même hauteur, alors il prend la forme d'une *chaînette*, c'est-à-dire une courbe d'équation :

$$f(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right),$$

où ch désigne la fonction *cosinus hyberbolique* définie par ch : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$ et $a$ est un réel strictement positif.




On notera de plus

$$\mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

On considérera dans la suite que les deux poteaux sont situés aux abscisses $-1$ et $1$.

On considère donc la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \end{array}.$$

**1.** En le justifiant, dresser le tableau de variation de la fonction $f$. On fera apparaître les images en $-1$, $1$ et $0$ dans le tableau.

**2.** On admet que la longueur de la chaînette est donnée par

$$\ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

(a) Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, $1 + [f'(x)]^2 = \mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{a}\right)$.

(b) Montrer que la fonction sh est une fonction impaire.

(c) Montrer alors que

$$\ell = 2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{a}\right).$$

**3.** Des considérations mécaniques permettent de calculer la tension du câble au niveau d'un poteau ; cette tension est égale à

$$T(a) = Ka\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{a}\right),$$

où $K$ est une constante réelle strictement positive.

On cherche alors dans cette question quelle valeur du paramètre $a$ il faut choisir pour que la tension au niveau du poteau soit minimale.

(a) Montrer que l'équation $ch(t) = t\,\mathrm{sh}(t)$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution dans $[0, +\infty[$, notée $m$.

(b) Montrer alors que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}(t) \geqslant t\,\mathrm{sh}(t)$ si et seulement si $t \in [0, m]$.

(c) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $m$ à $10^{-2}$ près.

(d) Montrer que la tension $T(a)$ est minimale pour $a = \frac{1}{m}$.

(e) Pour cette valeur de $a$, calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la longueur de la chaînette correspondante.

## FIN DU SUJET